ĐỀ THI HSG LỚP 9 VÒNG 1 – Năm Học: 2014-2015

QUẬN TÂN PHÚ

Thời gian: 120 phút

(NGÀY THI: 23/08/2014)

Bài 1: (2 điểm) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$. Tính: $N=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Bài 2: (4 điểm)

1) Giải phương trình: $9\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}\right)=x+4$
2) Trường THCS A có 1050 học sinh. Hiệu trưởng muốn phấn đấu để xây dựng trường đạt chuẩn quốc gia nên trường đã được xây thêm 4 phòng học mới. Kết quả là sĩ số trung bình mỗi lớp giảm xuống 8 học sinh. Tuy nhiên, để trở thành trường đạt chuẩn quốc gia thì sĩ số trung bình mỗi lớp học phải giảm thêm 7 học sinh nữa. Để đạt được đều đó, trường cần phải xây thêm 5 phòng học nữa. Em hãy cho biết để thực hiện xây dựng trường đạt chuẩn quốc gia thì trường cần phải có tất cả bao nhiêu phòng học và mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Bài 3: (4 điểm) Giải hệ phương trình:

1) Cho a, b, c là số đo 3 cạnh của $\triangle ABC$. Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương, chứng minh: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc$
2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a+b+c\leq 3$. Tìm GTNN của: $P=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2015}{ab+bc+ca}$

Bài 4: (8 điểm) Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) đường kính BC, AB < AC. Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$, $BC=25cm$, $AH=12cm$.

1) Tính AB, AC.
2) Vẽ (O_1) nội tiếp $\triangle ABC$. Gọi I, J, K lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) lean BC, AC, AB. KI cắt AH tại N. Trên AB lấy L sao cho AL = AN. Chứng minh: BL = AK rồi từ đó suy ra LO_1 đi qua trung điểm của AC.
3) Vẽ đường kính AD của (O). Vẽ đường thẳng song song với AD qua B, C lần lượt cắt (O) tại E, F. Gọi $H_1;H_2$ là trực tâm của $\triangle ABF, \triangle ACE$. Chứng minh trung điểm của H_1H_2 là điểm cố định.

Bài 5: (2 điểm)

1) Tìm $n\in N$ để $A=n^4-n+2$ là số chính phương.
2) Tìm $x,y,z\in Z^+$ biết $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{xz}{y}=3$

HẾT

ĐỀ THI HSG LỚP 9 VÒNG 1 – Năm Học: 2014-2015

QUẬN TÂN PHÚ

Thời gian: 120 phút

(NGÀY THI: 23/08/2014)

Bài 1: (2 điểm) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$. Tính: $N=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=0 \Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c)=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ab-3bc-3ca)=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\ (\text{vì } a+b+c\neq 0)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$

Khi đó: $N=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=\dfrac{a^2+a^2+a^2}{(a+a+a)^2}=\dfrac{3a^2}{(3a)^2}=\dfrac{1}{3}$

Bài 2: (4 điểm)

1) Giải phương trình: $9\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}\right)=x+4$

Điều kiện: $x\geq -\dfrac{1}{3}$

$9\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}\right)=x+4 \Leftrightarrow 9(4x+5-3x-1)=(x+4)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 9(x+4)-(x+4)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}\right)=0 \Leftrightarrow (x+4)\left(9-\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}=9\left(\text{vì } x+4\neq 0 \text{ do } x\geq -\dfrac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 4x+5+3x+1+2\sqrt{(4x+5)(3x+1)}=81 \Leftrightarrow 2\sqrt{12x^2+19x+5}=75-7x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{75}{7} \\ 48x^2+76x+20=49x^2-1050x+5625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{75}{7} \\ x^2-1126x+5605=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{75}{7} \\ \left[\begin{array}{l} x=1121\ (\text{loại}) \\ x=5\ (\text{nhận}) \end{array}\right. \end{cases}$ Vậy $S=\{5\}$

2) Trường THCS A có 1050 học sinh. Hiệu trưởng muốn phấn đấu để xây dựng trường đạt chuẩn quốc gia nên trường đã được xây thêm 4 phòng học mới. Kết quả là sĩ số trung bình mỗi lớp giảm xuống 8 học sinh. Tuy nhiên, để trở thành trường đạt chuẩn quốc gia thì sĩ số trung bình mỗi lớp học phải giảm thêm 7 học sinh nữa. Để đạt được đều đó, trường cần phải xây thêm 5 phòng học nữa. Em hãy cho biết để thực hiện xây dựng trường đạt chuẩn quốc gia thì trường cần phải có tất cả bao nhiêu phòng học và mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Gọi x (học sinh) là số học sinh trung bình của mỗi lớp $\left(x \in N^*; x < 1050\right)$

Số phòng học của trường là: $\dfrac{1050}{x}\left(\text{phòng}\right)$

Số phòng học sau khi xây thêm 4 phòng là: $\dfrac{1050}{x} + 4\left(\text{phòng}\right)$

Số học sinh trung bình của mỗi lớp sau khi xây thêm 4 phòng là: $\left(x-8\right)\left(\text{học sinh}\right)$

Số học sinh trung bình mỗi lớp để trường đạt chuẩn quốc gia là: $x - 8 - 7 = x - 15\left(\text{học sinh}\right)$

Số phòng học của trường để trường đạt chuẩn quốc gia là: $\dfrac{1050}{x} + 4 + 5 = \dfrac{1050}{x} + 9\left(\text{phòng}\right)$

Ta có phương trình:

$$\left(\frac{1050}{x} + 4\right)\left(x-8\right) = \left(\frac{1050}{x} + 9\right)\left(x-15\right) \Leftrightarrow 1050x - 8400 + 4x^2 - 32x = 1050x - 15750 + 9x^2 - 135$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 103x - 7350 = 0 \Leftrightarrow \left(x-50\right)\left(5x+147\right) = 0 \Leftrightarrow x = 50\left(\text{nhận}\right) \text{ hay } x = -\frac{147}{5}\left(\text{loại}\right)$$

Vậy để trường đạt chuẩn quốc gia thì số học sinh trung bình mỗi lớp là: x - 15 = 35 (học sinh)

và số phòng học của trường là: $\dfrac{1050}{50} + 4 = 25\left(\text{phòng}\right)$

<u>Bài 3: (4 điểm)</u> Giải hệ phương trình:

1) Cho a, b, c là số đo 3 cạnh của ΔABC. Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương, chứng minh: $\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right) \le abc$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên áp dụng BĐT trong tam giác, ta được:

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c>0 \\ b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \end{cases}$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương, ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(b+c-a\right)+\left(c+a-b\right)}{2} \ge \sqrt{\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)} \\ \dfrac{\left(c+a-b\right)+\left(a+b-c\right)}{2} \ge \sqrt{\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)} \\ \dfrac{\left(b+c-a\right)+\left(a+b-c\right)}{2} \ge \sqrt{\left(b+c-a\right)\left(a+b-c\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \ge \sqrt{\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)} \\ a \ge \sqrt{\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)} \\ b \ge \sqrt{\left(b+c-a\right)\left(a+b-c\right)} \end{cases}$$

Nhân vế theo vế, ta được: $\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right) \le abc$

Vậy BĐT đã được chứng minh.

2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a+b+c \le 3$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2015}{ab+bc+ca}$$

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2015}{ab+bc+ca} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{2013}{ab+bc+ca}$$

Áp dụng BĐT: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z}, \forall x,y,z > 0$; dấu "=" xảy ra khi x = y = z, ta được:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1\left(\text{vì } a+b+c\le 3\right)\ (1)$$

Áp dụng BĐT $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$; dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$, ta được:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 9\left(\text{vì } a+b+c\le 3\right)\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$$

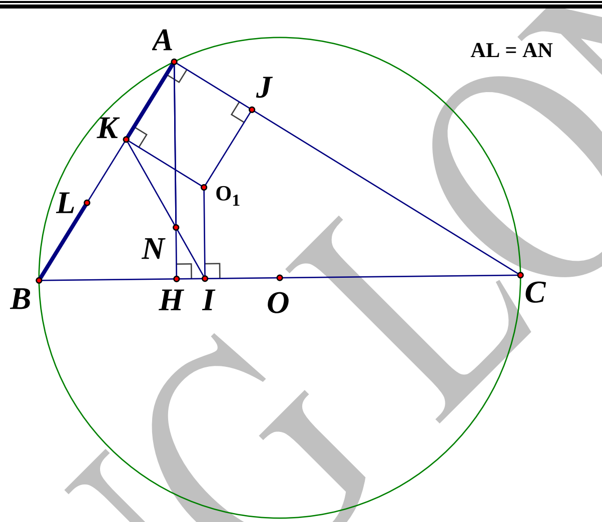
$$\Leftrightarrow\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2013}{ab+bc+ca}\ge\frac{2013}{3}\ (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế theo vế, ta được: $P\ge 672$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1

Vậy $P_{min}=672$ khi $x=y=z=1$

<u>Bài 4: (8 điểm)</u> Cho ΔABC nội tiếp (O) đường kính BC, AB < AC. Vẽ đường cao AH của ΔABC, $BC=25cm$, $AH=12cm$.



1) Tính AB, AC.

Đặt BH = x, x > 0. suy ra HC = 25 – x

Do AB < AC nên BH < HC $\Rightarrow x\le 25-x\Leftrightarrow x\le\frac{25}{2}$

Ta có: $AH^2=BH.HC\Rightarrow 25^2=x(25-x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\,(\text{nhận})\\x=16\,(\text{loại})\end{array}\right.\Rightarrow BH=9(cm)$

Ta có: $AB^2=BH.BC\Rightarrow AB^2=9.25\Rightarrow AB=15(cm)$

$AC^2=CH.BC\Rightarrow AC^2=16.25\Rightarrow AC=20(cm)$

2) Vẽ (O_1) nội tiếp ΔABC. Gọi I, J, K lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) lean BC, AC, AB. KI cắt AH tại N. Trên AB lấy L sao cho AL = AN. Chứng minh: BL = AK rồi từ đó suy ra LO_1 đi qua trung điểm của AC.

Từ A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt IK tại S

Ta có: $\begin{cases}ASK=KIB(...)\\AKS=IKB(...)\\KIB=IKB(...)\end{cases}\Rightarrow ASK=AKS\ \Rightarrow\Delta SAK\text{ cân tại A}\Rightarrow AS=AK$

Mà AK = AJ nên AS = AJ. Do đó: $\Delta ANS = \Delta ALJ(c-g-c)$

$\Rightarrow ANS = ALJ$ mà $ANS + ASK = 90^0$ nên $ALJ + ASK = 90^0$

Mặt khác: $ASK = AKS = LKN$ nên $ALJ + LKN = 90^0 \Rightarrow LJ \perp KI$ mà $BO_1 \perp KI$ nên $LJ\ //\ BO_1$

Xét tứ giác $BLJO_1$, ta có: $\begin{cases} LJ\ //\ BO_1\ (cmt) \\ BL\ //\ JO_1\ (\perp AC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BLJO_1$ là hình bình hành (...) $\Rightarrow BL = O_1J = AK$

Cách 2 (tính toán)

Ta có: $AK = \dfrac{AB + AC - BC}{2} = \dfrac{15 + 20 - 25}{2} = 5 \Rightarrow O_1I = 5(cm)$

Ta chứng minh được: $\Delta HIN \backsim \Delta IO_1B(g-g)$

$\Rightarrow NH = \dfrac{BI.HI}{O_1I} = \dfrac{1.10}{2} = 2(cm) \Rightarrow AN = AH - NH = 12 - 2 = 10(cm)$

mà AL = AN (gt) nên AL = 10 (cm) $\Rightarrow BL = AB - AL = 15 - 10 = 5(cm)$ Do đó: BL = AK

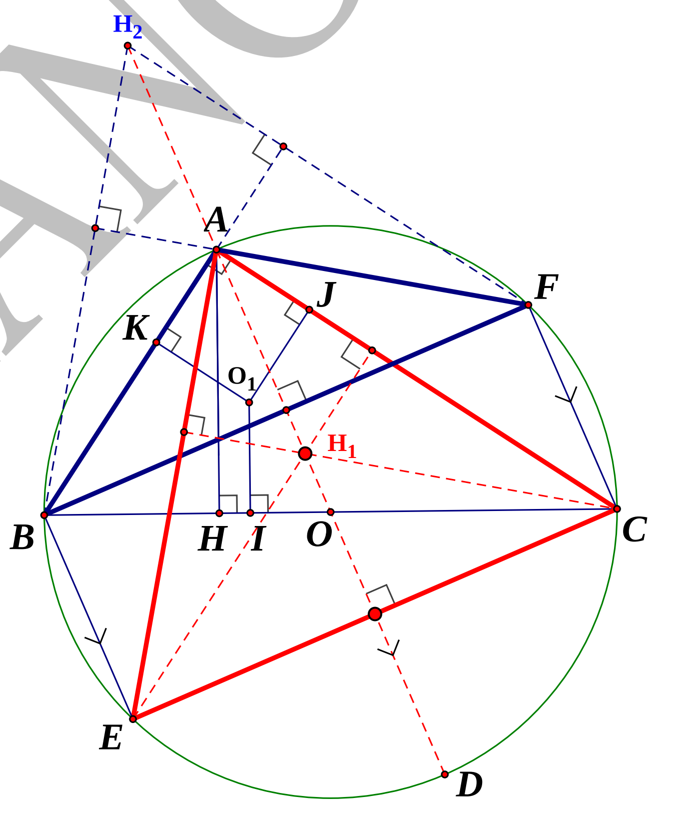
Gọi Q là giao điểm của LO_1 và AC. Ta chứng minh được AK = KL (=5cm)$\Rightarrow$ K là trung điểm của AL

nên dễ chứng minh được ΔO_1AL vuông cân tại $O_1 \Rightarrow ... \Rightarrow \Delta ALQ$ vuông cân tại A

$\Rightarrow AQ = AL = 10(cm) \Rightarrow CQ = AC - AQ = 20 - 10 = 10(cm)$

Do đó AQ = CQ (=10 cm) $\Rightarrow$ Q là trung điểm của AC $\Rightarrow LO_1$ đi qua trung điểm của AC.

3) Vẽ đường kính AD của (O). Vẽ đường thẳng song song với AD qua B, C lần lượt cắt (O) tại E, F. Gọi $H_1;H_2$ là trực tâm của $\Delta ABF, \Delta ACE$. Chứng minh: A là trung điểm của H_1H_2.



Ta có: $CF // AD$ và $CF \perp CE \Rightarrow AD \perp CE$

Ta chứng minh được tứ giác BFCE là hình chữ nhật... $\Rightarrow$ O là trung điểm của dây EF

$\Rightarrow$ EF là đường kính của (O) $\Rightarrow \Delta AEF$ vuông tại A $\Rightarrow AE \perp FA$ mà $FA \perp BH_2 (...)$ nên $AE // BH_2$

Ta có: $CF // AD$ và $CF \perp CE \Rightarrow AD \perp CE$ mà $AH_1 \perp CE$ nên $AD \equiv AH_1 \Rightarrow H_1 \in AD$

Cmtt, ta có: $H_2 \in AD$, do đó H_1, A, H_2 thẳng hàng.

Ta có: $\begin{cases} AH_1 = BE\left(\text{tứ giác } ABEH_1 \text{ là hình bình hành}\right) \\ AH_2 = BE\left(\text{tứ giác } AEBH_2 \text{ là hình bình hành}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AH_1 = AH_2$ mà H_1, A, H_2 thẳng hàng nên A là trung điểm của H_1H_2

Bài 5: (2 điểm)

1) Tìm $n \in N$ để $A = n^4 - n + 2$ là số chính phương.

Đặt $A = n^4 - n + 2 = k^2$ (không mất tính tổng quát, giả sử $k \in N$)

*** Xét n = 0 thì A = 2 (loại)**

*** Xét n = 1 thì A = 2 (loại)**

*** Xét $n \geq 2 \Leftrightarrow 2 - n \leq 0 \Leftrightarrow n^4 - n + 2 \leq n^4 = \left(n^2\right)^2$**

Ta chứng minh: $\left(n^2 - 1\right)^2 < n^4 - n + 2$

$$\Leftrightarrow n^4 - 2n^2 + 1 < n^4 - n + 2$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - n + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(n - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \left(\text{đúng}\right)$$

Vậy $\left(n^2 - 1\right)^2 < n^4 - n + 2 \leq \left(n^2\right)^2 \Rightarrow \left(n^2 - 1\right)^2 < k^2 \leq \left(n^2\right)^2 \Rightarrow k^2 = n^4$

$\Rightarrow n^4 - n + 2 = n^4 \Leftrightarrow n = 2$

Thử lại A = 16 là số chính phương

Vậy khi n = 2 thì A là số chính phương.

2) Tìm $x, y, z \in Z^+$ biết $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 3$

Cách 1:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = 2y \\ \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{xz}{y}} = 2z \\ \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y}} = 2x \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq x + y + z$ **mà** $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 3$ **nên** $x + y + z \leq 3$

Mặt khác x, y, z $\in Z^+$ nên x = y = z = 1.

Cách 2:

Do vai trò của x, y, z là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử: $x \geq y \geq z \geq 1$

Ta có: $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge\frac{z^2}{z}+z\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\ge z+2z\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=3z\ \Rightarrow 3\ge 3z\Rightarrow z\le 1\Rightarrow z=1\left(\text{vì } z\in Z^+\right)$

Với z = 1 thì $VT(1)=xy+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge xy+2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=xy+2\ \Rightarrow 3\ge xy+2\Rightarrow xy\le 1\Rightarrow xy=1\left(\text{vì } x,y\in Z^+\right)$

$\Rightarrow x=y=1\left(\text{vì } x,y\in Z^+\right)$

Thử lại ta thấy $x=y=z=1$ **thỏa đề bài.**

Vậy nguyên dương duy nhất của phương trình là: $(x;y;z)=(x;y;z)$

HẾT